ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ «ΜΗΚΟΣ 3m»

Ιωάννης Π. Πλατάρος

Μαθηματικός-Οικονομολόγος

M.edu «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών»-ΕΚΠΑ

M.Edu «Θεωρία -Πράξη & Αξιολόγηση της Διδασκαλίας Παν. Λευκωσίας

Ηλ.ταχ. plataros@gmail.com

Abstract: The possibility of measuring the physical size "3m length" accurately or not is a question of exploration related to Physics, Mathematics and finally to Philosophy, as the mathematical answer is that "it is impossible to measure exactly" and which is in conflict with the common empirical intuition of an average human. Thus, a small documentation of acceptance of the result is made with some similar examples.

Περίληψη: Η δυνατότητα ακριβούς ή όχι μέτρησης του φυσικού μεγέθους «μήκος 3m» συνιστά ένα διερευνητικό ερώτημα που άπτεται της Φυσικής, των Μαθηματικών και τελικά και της Φιλοσοφίας, καθώς η Μαθηματική απάντηση είναι ότι «είναι αδύνατον να μετρηθεί ακριβώς» και η οποία έρχεται σε αντίθεση με την κοινή εμπειρική διαίσθηση ενός μέσου ανθρώπου. Γίνεται έτσι και μια μικρή τεκμηρίωση αποδοχής του αποτελέσματος με κάποια ανάλογα παραδείγματα.

Λέξεις -Κλειδιά: Μέτρο, μονάδα 1m, μήκος, μέτρο Λεμπέκ , γεωμετρική πιθανότητα, κατασκευασιμότητα, αριθμήσιμο, υπεραριθμήσιμο, συνεχές, ρητοί, αλγεβρικοί, υπερβατικοί, σύμμετρα μεγέθη, ασύμμετρα μεγέθη.

Εισαγωγή: Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα της απόλυτης μέτρησης ενός μεγέθους, δηλ. της εύρεσης της αληθούς τιμής του του εάν βεβαίως αυτή υπάρχει. Επίσης θα εξετάσουμε την μαθηματική αναγωγή του όλου προβλήματος και της προβληματικής του, σε

επιστημολογικές και φιλοσοφικές αρχές και ερωτήματα, με κατεύθυνση απλοποίησης, ώστε να μπορούν να αναπτυχθούν ακόμα και σε περιβάλλον Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Η Μαθηματική πραγματικότητα για τους αριθμούς: Είναι γνωστή η φράση του Λέοπολντ Κρόνεκερ ότι «Ο Θεός δημιούργησε τους ακέραιους αριθμούς· όλα τα άλλα είναι έργα του ανθρώπου» [1], [2] Η αφοριστική αυτή δήλωση, ίσως μπορεί να ερμηνευθεί και με την γνωστή κακή συμπεριφορά του ίδιου του Κρόνεκερ απέναντι στον Γκέοργκ Καντόρ, όταν ο τελευταίος ανεκάλυψε την υπεραριθμησιμότητα του συνόλου (0,1) και τις συνέπειες της αποδοχής του αξιώματος της επιλογής. [3],[4], [5] (Διαγώνιο «επιχείρημα» Καντόρ) . Λέγοντας λ.χ. «3 αβγά» εννοούμε έναν σαφώς ορισμένο αριθμό, απολύτως μετρήσιμο και επαληθεύσιμο. Οι Φυσικοί αριθμοί, συνιστούν μια εξαιρετικά διαυγή, φυσική, πρωταρχική έννοια, διακριτότητας, απαρχή απαριθμησιμότητας. Τα 3 αυγά, ακόμα κι αν είναι όρνιθας, χελιδονιού και στρουθοκαμήλου, είναι πάντα «3 αυγά» και όλοι μπορούν να τα μετρήσουν και να το επαληθεύσουν. Για τα 3m θα δούμε στην ανάπτυξη της πορείας, καθώς τίθεται θέμα «καλώς ορισμένου» της μονάδας «1m», της παραγωγής πολλαπλασίου της, όπως και της ανάγνωσης του αποτελέσματος της μέτρησης από κάποιο όργανο. Ακόμα όμως κι αν υποθέσουμε ότι κάποια τέτοια προβλήματα αίρονται τεχνολογικώς συναντάμε εμπόδια Μαθηματικής φύσεως, που έχουν να κάνουν με το συνεχές, την υπεραριθμησιμότητα των Πραγματικών, που είναι οιονεί «απειροδέστερη» της αριθμησιμότητας των Ρητών αφού $\aleph_1 > \aleph_0$. (Αν και μόνον το εμπόδιο ακριβούς μέτρησης από την από την πυκνότητα των δεκαδικών αριθμών αρκεί.) Ας τα πάρουμε όμως τα δεδομένα από την αρχή:

Είναι «καλώς ορισμένο» το 1m; Το «Γαλλικό μέτρο» όπως το έλεγαν πιο παλιά, είναι η απόσταση στους 0º C μεταξύ δύο χαραγών πάνω σε μία ράβδο-πρότυπο από ιριδιούχο λευκόχρυσο, που φυλάσσεται στο Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών στις Σέβρες. [6] Επέλεξαν σταθερή θερμοκρασία, (εδώ τους 0ºC) διότι λόγω διαστολών -συστολών σε διαφορετικές θερμοκρασίες έχουμε διάφορα μήκη και επί πλέον το συγκεκριμένο κράμα (Ir-Pt) έχει επιλεγεί επίτηδες με μικρό-σχετικά- συντελεστή γραμμικής διαστολής. Αν

όμως φανταστούμε το κινητικό μοντέλο της Θερμότητας, όπου η ράβδος αυτή είναι ένα σύνολο μορίων των οποίων το πλέγμα πάλλεται στους 0ºC, βλέπουμε αμέσως την ασάφεια του ορισμού καθώς οι παλλόμενες άκρες δεν ορίζουν σταθερό μήκος. Ένας αντίλογος θα ήταν να ορίσουμε το 1m στο απόλυτο μηδέν (-273ºC) όπου εξ ορισμού της ποιότητας του μεγέθους της θερμοκρασίας δεν υπάρχει κίνηση του πλέγματος των μορίων του κράματος. Ακόμα και στους -273ºC να ορίζαμε το 1m και να ξεπερνούσαμε το πρόβλημα της ακριβούς επίτευξης του απολύτου μηδενός που ίσως είναι αξεπέραστο λόγω του ότι η επίτευξη αυτή προϋποθέτει θεωρητικά απουσία της πανταχού παρούσας κοσμικής ακτινοβολίας όπου ακόμα και μοναδικό φωτόνιο πιθανόν να κτυπά έναν πυρήνα μοναδικού μορίου που να δώσει ελαχιστότατη κίνηση στο πλέγμα, ακόμα και τότε, μόνο λόγω της ύπαρξης της πυκνότητας των δεκαδικών (παραβλέπουμε την πυκνότητα ρητών και αρρήτων) αίρεται η ακρίβεια του ορισμού του 1m.

Υποθέτοντας ότι με κάποιο τεχνολογικό τρόπο αίρεται και το εμπόδιο της ταλάντωσης των μορίων, έχουμε το άλλο όριο, της ύλης, του πέρατος της έννοιας μόριο, που εδώ συμπίπτει με την έννοια άτομο. Το τροχιακό μοντέλο δίνει κάποιο πυρήνα με πρωτόνια και νετρόνια γύρω από τα οποία περιστρέφονται ηλεκτρόνια. Ακόμα και να παρακάμπταμε την αρχή της αβεβαιότητας (απροσδιοριστίας) του Βέρνερ Χάιζενμπεργκ [7] στο «να το δούμε με ακρίβεια» που έρχεται σε αντίθεση με το «να προσδιορίσουμε την θέση του με ακρίβεια» και να υποθέσουμε («μεταφυσικά») ακίνητο ηλεκτρόνιο και να προσδιορίσουμε κάποιο άκρο, το άκρο δεν μπορεί να είναι σημείο με την Γεωμετρική σημασία του «μέρος ουθέν» [8] Ο τελευταίος - από αρκετούς- ορισμός του μέτρου είναι ότι μέτρο είναι *«το μήκος που διανύει το φως στο κενό σε χρόνο 1/299.792.458 του δευτερολέπτου»* [6] Αν υποθέσουμε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι απόλυτα σταθερή στο κενό, μένει το πώς θα μετρηθεί ακριβώς το 1sec, δημιουργώντας έναν φαύλο κύκλο ακρίβειας της μέτρησης. Ακόμα κι αν παραβλέψουμε την ακρίβεια μέτρησης της ταχύτητας του φωτός με όποια μέθοδο, όπου κι αυτή, πάντα χρησιμοποιεί χρονόμετρο, εάν υπάρχει και πώς «απόλυτο κενό» κτλ. Η ελάχιστη μαθηματική συνθήκη - όριο ακρίβειας, είναι άτεγκτη: *«Σε*

οιουδήποτε μικρού μήκους διάστημα πραγματικών αριθμών εμπεριέχονται άπειροι δεκαδικοί»

Η «κατασκευασιμότητα με κανόνα και διαβήτη.» : Η έννοια ακούγεται εκ πρώτης όψεως ως μια φυσική διαδικασία, αφού διαφαίνεται να είναι εξ ορισμού ενόργανη. Στην πραγματικότητα όμως, εννοούμε μια απολύτως αφαιρετική θεωρητική Μαθηματική διαδικασία, όπου ο διαβήτης νοείται με μύτη τύπου «μαθηματικό σημείο», ο κύκλος που διαγράφει ως «απλατής γραμμή» , όπως και η ευθεία του κανόνα. Παράλληλα οι κατασκευές, ως προς το πλήθος τους, οσοδήποτε μεγάλες είτε οσοδήποτε μικρές, θεωρούνται και μη φραγμένες. Επομένως, δεν υπάρχει εφικτότητα ανθρώπινης συγκεκριμένης κατασκευής με την απόλυτη έννοια, αλλά πεπερασμένου πλήρους κατασκευών, με μετρήσεις πάντα «στο περίπου» με μεγαλύτερη είτε μικρότερη ακρίβεια, στα πλαίσια του «τυχαίου σφάλματος», αλλά και μαθηματικά αξεπέραστου «σφάλματος συστήματος» κανόνα και διαβήτη, όπως ήδη εξηγήσαμε. (Απλατής γραμμή, αδιάστατο σημείο)

Πρόταση: *Δοθέντων δύο τυχαίων ευθυγράμμων τμημάτων α και β, η πιθανότητα να έχουν μεταξύ τους άρρητη -ασύμμετρη και μάλιστα υπερβατική σχέση, είναι 100% , δηλ. το βέβαιο ενδεχόμενο.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θωρήσουμε το ένα από τα δύο λ.χ. το α με μήκος-μέτρο 1, όπως κάνουμε στην Φυσική είτε στα Μαθηματικά, όπου την μονάδα μήκους την ορίζουμε αυθαίρετα. Σε έναν άξονα των Πραγματικών αριθμών με μονάδα το τμήμα α, με μ(α)=1, θεωρούμε το σύνολο [0,β] όπου ισχύει το μέτρο Λεμπέκ με μ([0,β])=β . Υπολογίζουμε την Γεωμετρική Πιθανότητα ύπαρξης υπερβατικών αριθμών στο διάστημα [0,β] . Αυτή εξ ορισμού [13] είναι

$$p(\upsilon\pi\varepsilon\rho\beta\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma_{[0,\beta]}) = \frac{\mu([0,\beta] - (\mathrm{P}\eta\tau o\acute{\iota}_{[0,\beta]} \cup \mathrm{A}\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa o\acute{\iota}_{[0,\beta]})}{\mu([0,\beta])} =$$

$$\frac{\mu([0,\beta]) - \mu(\mathrm{P}\eta\tau o\acute{\iota}_{[0,\beta]} \cup \mathrm{A}\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa o\acute{\iota}_{[0,\beta]})}{\mu([0,\beta])} = \frac{\beta - 0}{\beta} = \frac{\beta}{\beta} = 1$$

Για την εξαγωγή του αποτελέσματος χρησιμοποιούνται οι προτάσεις: *(1): «Οι Ρητοί αριθμοί είναι αριθμήσιμοι» (2): «Οι αλγεβρικοί αριθμοί είναι*

αριθμήσιμοι» (3): «Η αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων, είναι αριθμήσιμο σύνολο» (4): «Το μέτρο κάθε αριθμησίμου συνόλου είναι το 0» (5): «Η συνάρτηση μέτρο, του συνήθους μέτρου (Λεμπέκ) πραγματικών, είναι προσθετική» (6): «Αλγεβρικοί (μη ρητοί) και Υπερβατικοί είναι ξένα σύνολα με ένωση τους Αρρήτους και Ρητοί και Άρρητοι ξένα σύνολα με ένωση τους Πραγματικούς»

Επομένως ο αριθμός β που είναι μια τυχαία επιλογή στο [0,β] είναι υπερβατικός άρα και το ίδιο το μέτρο του ευθ. τμήματος β.

Πόρισμα Ι : *Έστω μοναδιαίο τυχαίο ευθύγραμμα τμήμα* α_0, $\mu(\alpha_0)=1$ *που καταμετρά τα μήκη τυχαίας άπειρης ακολουθίας ευθυγράμμων τμημάτων*

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_\nu, ...$ *Τότε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων, εκφράζονται όλα με υπερβατικούς αριθμούς.*

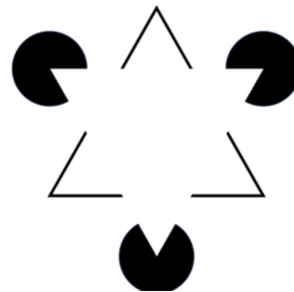
Πόρισμα ΙΙ: *Είναι αδύνατον να ορισθεί μαθηματική μονάδα μήκους η οποία να μετρά ακριβώς τυχαία μήκη, πέραν ρητών πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων της καθώς και αλγεβρικών ασυμμέτρων μηκών που κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη απ΄ αυτήν την ίδια.*

Συμπεράσματα : Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι:

- Μια ιδανική μαθηματική μονάδα μήκους, όταν είναι να μετρήσει ένα τυχαίο μήκος α, θα το μετρά αυτό πάντα στο περίπου, με μια ρητή προσέγγιση, αφού το α θα εκφράζεται με πιθανότητα 100% με ασύμμετρο μέγεθος. Αν αυτό συμβαίνει για ιδανικά μήκη όπως τα μαθηματικά, πόσο δε μάλλον θα ισχύει και για τα φυσικά μήκη που από την φύση τους είναι «μη καλώς ορισμένα» αφού πάντα έχουν ασαφή όρια, όπως έχουμε εξηγήσει.
- Η ανθρώπινη συνείδηση, εγκλωβισμένη στα πεπερασμένα της όρια, δυσκολεύεται να αποδεχθεί πορίσματα γεωμετρικών πιθανοτήτων επί απειροσυνόλων, αφού οι ρητοί και κατ΄ επέκτασιν και οι αλγεβρικοί, είναι άπειροι, αριθμήσιμοι στο πλήθος και κατασκευάσιμοι με κανόνα και διαβήτη. Είναι δηλαδή και υπαρκτά και εφικτά ενδεχόμενα, αλλά με πιθανότητα ανεύρεσης-ανίχνευσης-προσδιορισμού-μέτρησης 0. Ισχύει δηλ. ότι αν φανταστώ το ευθύγραμμο τμήμα -σύνολο [0,1] και το τέμνω διαρκώς

με μια ευθεία, δεν θα το τμήσω ποτέ σε ρητό αριθμό, ας εκτελέσω το πείραμα αυτό με απεριόριστο αριθμό επαναλήψεων. Έχουμε δηλαδή μια γνωστική σύγκρουση σε σχέση με τον κλασικό ορισμό των πιθανοτήτων η οποία όμως αναφέρεται σε πεπερασμένα σύνολα δειγματικών χώρων, πεπερασμένα, από την ίδια την φύση των ενδεχομένων που μελετούμε ή είναι δυνατόν να μελετήσουμε με στατιστικές μεθόδους.

- Η οντότητα «1 μαθηματική μονάδα μήκους» που την εννοούμε ως το μ([0,1]) εξακολουθεί να έχει μήκος 1, ακόμα κι αν από το [0,1] αφαιρέσουμε όλους τους αλγεβρικούς αριθμούς Α που περιέχει. Η συνάρτηση τύπου Ντιρικλέ $f(x)=\begin{cases}1, \alpha\nu\ \chi\in[0,1]-\mathrm{A}\\ 0, \alpha\nu\ \chi\in\mathrm{A}\cap[0,1]\end{cases}$, Α *το σύνολο Αλγεβρικών* , είναι παντού ασυνεχής ενώ ο ένας κλάδος της συνιστά μήκος συνάρτησης 1. Οι ικανές συνθήκες για να συνίσταται μήκος από ένα σύνολο ή υποσύνολό του, είναι (i) Να είναι παντού πυκνό και (ii) Να είναι υπεραριθμήσιμο. Αν πληρούται μία μόνο συνθήκη, δεν εξασφαλίζεται ύπαρξη μήκους. Παράδειγμα το $\mathbb{Q}$ που είναι παντού πυκνό, αλλά δεν είναι υπεραριθμήσιμο και ισχύει μ($\mathbb{Q}$)=0 . Επίσης το σύνολο του Καντόρ $\mathbb{C}_a$ που είναι υπεραριθμήσιμο, αλλά είναι παντού μη πυκνό όπου και γι αυτό έχουμε μ($\mathbb{C}_a$) =0 , [3] , [9], [10]



Σχήμα 1: Το τρίγωνο Κανίζσα] Γκαετάνο όπου φαίνεται ένα λευκό ισόπλευρο τρίγωνο, χωρίς όμως να έχουν χαραχθεί οι πλευρές του.[11]

Συμφιλίωση αισθήσεων και διαισθητικών αντιλήψεων με την Μαθηματική πραγματικότητα: Ενίοτε συμβαίνει να έχουμε την αίσθηση, ότι κάποια μαθηματικά αντικείμενα που είναι προϊόντα Μαθηματικής αφαίρεσης, τα αισθητοποιούμε, άρα τα αντιλαμβανόμαστε πλήρως κατά την ουσία τους. Για παράδειγμα στο σχ. 1 έχουμε την εδραία αίσθηση ότι βλέπουμε το λευκό ισόπλευρο τρίγωνο με την κορυφή προς τα κάτω. Όμως, η λογική υπαγορεύει ότι είναι αδύνατον ο



Σχήμα 2: Τα δύο ορθογώνια τραπέζια, το λευκό και το μαύρο, αισθητοποιούν την πλευρά που τα χωρίζει σε δύο ημιεπίπεδα, ως «αισθητό απλατές ευθύγραμμο τμήμα που όμως δεν υπάρχει.»

εγκέφαλος, μέσω των οφθαλμών, να βλέπει την περίμετρο του λευκού ισοπλεύρου τριγώνου, δεδομένου ότι οι γραμμές ως απλατείς στερούνται ύλης και άρα είναι αδύνατον να γίνει διέγερση των οφθαλμών, από φως που εκπέμπουν. Άρα είναι αδύνατη η καταγραφή και αντίστοιχη οπτική αντίληψη στον εγκέφαλο. Πρόκειται περί οφθαλμαπάτης.[11] Ομοίως και τα δύο ορθογώνια τραπέζια αισθητοποιούν την κοινή τους πλευρά ως υπάρχον απλατές ευθύγραμμο τμήμα (σχήμα 2) Η περεταίρω προσέγγιση στην πραγματικότητα, μας λέει ότι είναι σχήματα που έχουν προκύψει από Η/Υ και άρα εκ κατασκευής όλα είναι εικονοστοιχεία (πίξελ) δηλ. στοιχειώδη τετραγωνάκια λευκά ή μαύρα. Άρα και οι εμφαινόμενες λωρίδες που δίνουν οπτική αίσθηση ευθείας, είναι συστοιχίες από τετραγωνάκια μαύρα ή λευκά. Κι αυτά τα εικονοστοιχεία με την σειρά τους, έχουν μια άλλη φυσική προσέγγιση του μικρόκοσμού τους έως ατομικού και όχι μόνον επιπέδου, καθώς ξεπερνούν τα όποια ανθρώπινα παράθυρα αισθητότητας και τα όποια κατώφλια αντιληπτότητας. Έτσι λοιπόν, η ως προς τον πληθικό αριθμό σύγκριση του αριθμήσιμου και του υπεραριθμήσιμου, είναι ισοπεδωτική υπέρ του υπεραριθμήσιμου, παρ΄ ότι και τα δύο συνιστούν άπειρο, ας ξενίζει η διαίσθηση. Μην ξεχνάμε, ότι τα αποτελέσματα του Καντόρ και ο λογισμός του με το άπειρο ήταν πιθανόν και η κύρια αιτία δημιουργίας της αντίπαλης Σχολής των Ιντουσιονιστικών («Εποπτικών- Ενορατικών-Διαισθητικών») Μαθηματικών του Μπράουερ με πρόδρομο τον Κρόνεκερ ο οποίος από δάσκαλος του Καντόρ, έγινε σφοδρός του πολέμιος. [1]

Αναλογικά, την ίδια δυσκολία αντιμετωπίζει η ανθρώπινη συνείδηση να κατανοήσει της Γεωμετρικά οριζόμενες πιθανότητες ή γενικά όσες αναφέρονται σε απειροσύνολα. Για παράδειγμα οι φυσικοί αριθμοί που δίνουν περατούμενες διαιρέσεις στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι όσοι είναι όροι του αναγώγου κλάσματος της μορφής $\alpha, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ Προφανώς πρόκειται για άπειρη κλάση. Όμως όλα τα υπάρχοντα θετικά ρητά κλάσματα παριστάνονται από την κλάση αναγώγων κλασμάτων $\frac{\alpha}{2^{\nu_1} \cdot 3^{\nu_2} \cdot 5^{\nu_3} \cdot 7^{\nu_4} \cdot 11^{\nu_5} \cdot \ldots \cdot p^{\nu_k} \cdot \ldots}$, $a \in \mathbb{N}$ όπου ο παρονομαστής αναφέρεται στην άπειρη ακολουθία των πρώτων αριθμών και άρα η κλάση των δύο φυσικών πρώτων 2 και 5 σε σχέση με το άπειρο πλήθος των φυσικών πρώτων

αριθμών, δίνουν λόγο $\frac{2}{\infty}=0$ και άρα *«η πιθανότητα να περατώνεται η διαίρεση μεταξύ δύο τυχαία επιλεγμένων φυσικών είναι 0»* , παρ΄ ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη που συνιστούν περατούμενες διαιρέσεις. Κλιμακωτά, αναλογικά, γίνεται αντιληπτό και το συμπέρασμα το καταληκτικό, ότι *«είναι αδύνατον να ορισθεί μέτρο που να μετρά τα πραγματικά μήκη των φυσικών σωμάτων»* (Αν είναι δυνατόν οντολογικώς να ορισθεί καλώς η έννοια «πραγματικό μήκος υλικού σώματος.») Η μαθηματικά άρρητη και δη υπερβατική σχέση μεταξύ οποιασδήποτε μονάδας και οιουδήποτε εξιδανικευμένου μαθηματικού μήκους, προφανώς εδράζεται στην έννοια του συνεχούς. Την ίδια στιγμή, τα Μαθηματικά και η Λογική, μας παρέχουν εργαλεία προσέγγισης της γνώσης όχι μόνο εξω-αισθητηριακά, αλλά και ενάντια στις αισθήσεις. Όμως και η διαίσθηση και η Λογική έχουν την αναγκαία συμπληρωματική τους θέση στα Μαθηματικά και όπως είπε ο Πουανκαρέ *«Η Λογική, που από μόνη της μπορεί να προσφέρει την βεβαιότητα, είναι το εργαλείο της απόδειξης, η διαίσθηση είναι το εργαλείο της επινόησης.»* [12]

Αναφορές:

[1] **Καπελλίδης, Σ.**(2012) *«Σημειώσεις στη Θεωρία Συνόλων»* (σελ.221) (ανάκτηση 15/10/2018 από https://mathbooksgr.files.wordpress.com/2012/06/capellides_settheory.pdf

[2] **Γκίκα, Κ.** (2006) *«Θεμελίωση του σώματος των Πραγματικών αριθμών, ισχύς και διάταξη αυτού»* Διπλωματική εργασία, Παν. Πατρών, σελ. 33 (Ανάκτηση 3/8/2018 http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/863/1/Nimertis_Gkika.pdf)

[3]**Βικιπαίδεια,** *«Γκέοργκ Καντόρ»* (Ανάκτηση 3/8/2018 https://el.wikipedia.org/wiki/Γκέοργκ_Καντόρ

[4]**Βικιπαίδεια** *«Αξίωμα της επιλογής»* (Ανάκτηση 3/8/2018 https://el.wikipedia.org/wiki/Αξίωμα_της_επιλογής)

[5]**Βικιπαίδεια** *«Θεώρημα του Καντόρ»* (Ανάκτηση: 3/8/2018 https://el.wikipedia.org/wiki/Θεώρημα_του_Καντόρ

[6] **Βικιπαίδεια :** «Μέτρο» Ανάκτηση 3/8/2018 https://el.wikipedia.org/wiki/Μέτρο/

[7]**Βικιπαίδεια:** : «Αρχή της απροσδιοριστίας https://el.wikipedia.org/wiki/Αρχή_της_απροσδιοριστίας

[8] **Πλατάρος, Ι.** (2001) *«Ορισμοί του Ευκλείδους»* Εργασία στα πλαίσια μετ/κού μαθήματος «Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά» στο ΕΚΠΑ, διδάσκων Νεγρεπόντης Σ. (Ανάκτηση 3/8/2018 https://www.academia.edu/21247787/38)

[9] **Καλουτζάκης,Μ.** παρουσιάσεις μαθήματος «Απειροστικός Ι» Μαθηματικού Τμήματος Παν. Κρήτης σε βίντεο http://fourier.math.uoc.gr/~mk/moodle/mod/page/view.php?id=42

[10] **Μαριάς,Μ.** «Το Θεώρημα Καραθεοδωρή και τα μέτρα

Borel» Ανοικτά Ακαδημαϊκά μαθήματα στο Α.Π.Θ. Τμήμα Μαθηματικών. (Ανάκτηση 13/10/2018 από https://opencourses.auth.gr/modules/document/file.php/OCRS436/Παρουσιάσεις/Ενότητα 02. Το Θεώρημα Καραθεοδωρή και τα μέτρα Borel.pdf

[11] **Κανίτζσα, Γ.** «15 υπέροχες οφθαλμαπάτες για τους λάτρεις του μυστηρίου» Αναφορά σε διαδικτυακό άρθρο ιστολογίου «Τι λές τώρα;» (Ανάκτηση 14/10/2018 από https://www.tilestwra.com/15-iperoches-ofthalmapates-gia-tous-latris-tou-mistiriou/ με πρωτογενή πηγή Ιστολόγιο εφημερίδος "The Telegraph")

[12] **Γκάγκαρη, Ν.** (2016) *« Ο ρόλος της διαίσθησης στην εκμάθηση των Μαθηματικών»* Μεταπτυχιακή εργασία ΜΠΣ «Διδακτική &Μεθοδολογία των Μαθηματικών» Μαθ. Τμήμα ΕΚΠΑ. σελ.34 (Ανάκτηση: 18/10/2018 http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_gagari.pdf

[13] **Κουνιάς, Σ. & Μωυσιάδης, Χ.** *«Θεωρία Πιθανοτήτων Ι»* Γεωμετρικές Πιθανότητες. Ιστολόγιο Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης (Ανάκτηση 22/11/2018 http://users.auth.gr/~cmoi/e-book%20on%20Probability-I/Docs/Section04/4_4_geometric_probs.htm)